# Fizyczne granice możliwości obliczeniowych

Opracował: Marcin Rociek

## 1. Aktualne trendy

Prawo Moore'a: prędkość / pojemność rośnie jak $t^{1,7}$ ($t$ - czas w latach).

Dzisiejszy komputer z procesorem 1,6GHz, 1GB pamięci RAM, 100GB HDD to 0,01% kosztu superkomputera z 1990.

W tym tempie za 300 lat będziemy mogli rozwiązywać problemy rozważające wszystkie $10^{80}$ cząstek wszechświata.

Czy aby na pewno?

## 2. Ograniczenia pojemności

### 2.1. Fizyczna reprezentacja informacji

Entropia - rodzaj fizycznej informacji. Każda informacja, którą możemy manipulować jest fizyczna z natury.

Termin wprowadzony w 1850 przez Rudopha Clausiusa.

Później Ludwig Boltzman określił maksymalną entropię $S$ dowolnego układu fizycznego jako logarytm z ilości wszystkich rozróżnialnych stanów. Logarytm o podstawie 2 $\rightarrow$ bity, logarytm naturalny $\rightarrow$ naty ($1\text{nat} = \log_2 e \approx 1{,}44b$). Nat jest znany inaczej jako stała Boltzmana $k_{\mathrm{B}}$ lub stała gazu idealnego $R$.

Znana informacja - fizyczna informacja w części systemu, którego stan jest znany.

Entropia - informacja w nieznanej części.

Możemy zmienić entropię w informację poprzez pomiar, zaś informację w entropię poprzez zapomnienie lub wymazanie jej.

Ich suma w danym systemie jest zawsze stała, chyba że zmieni się maksymalna ilość możliwych rozróżnialnych stanów systemu, poprzez np. zmianę jego rozmiaru, dodania lub odjęcia energii, itp.

## 2.2. Granice entropii

Warren Smith postuluje górną granicę entropii $S$ w układzie o objętości $V$ w sposób następujący:

$$\frac{S}{V} = \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{16\sqrt{\pi}}{3 \cdot 60^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(\frac{c}{\hbar} \cdot \frac{M}{V}\right)^{\frac{3}{4}} \text{nat}$$

Gdzie: $q$ - ilość rozróżnialnych typów cząstek, $c$ - prędkość światła, $\hbar$ - stała Plancka, $M$ - całkowita energia masy.

Przykład: 1m$^3$ zawierający 1000kg światła (fotony o dwóch stanach polaryzacji) może pomieścić maksymalnie $6 \times 10^{34}$ bitów, czyli 60kb w 1Å$^3$. Prawdopodobnie granica ta jest nieosiągalna, gdyż światło o takiej gęstości (t.j. wody) miało by temperaturę ok. miliarda stopni i ciśnienie rzędu ok. $10^{16}$ funtów na cal kwadratowy.

Seth Lloyd zaprezentował granicę niemal identyczną na podstawie podobnych przesłanek różniącą się o mały współczynnik $2\sqrt{2}$. Przykładowy 1kg 1l „laptop” (o gęstości wody) składający się z dwustanowych fotonów miałby maksymalną entropię $2{,}13 \times 10^{31}$ bitów.

Granice te nie biorą pod uwagę efektów grawitacyjnych i relatywistycznych. Jacob Bekenstein pokazuje dużo luźniejszy limit entropii:

$$S < \frac{2\pi ER}{\hbar \cdot c}$$

Gdzie: $E$ - całkowita energia układu, $R$ - promień układu.

Aktualnie jedynym znanym układem osiągającym takie ilości entropii są czarne dziury. Entropia czarnej dziury jest proporcjonalna do jej powierzchni (a nie objętości!). Czarna dziura ma dokładnie $1/4$ nata entropii w kwadracie o boku długości Plancka ($1,6 \times 10^{-35}$). Innymi słowy absolutnym fizycznym minimum dla 1 nata jest kwadrat o boku równym 2 długości Plancka. Granica wyznaczona przez Bekensteina jest duża: hipotetyczna „maszyna” o promieniu 1m posiadała by gęstość entropii $10^{39}$b/Å$^3$. Musiałaby być jednak czarną dziurą o masie Saturna.

## 2.3. Ile bitów można przechować w atomie?

- Jądra mogą przechowywać 1 bit informacji. Wzbudzone jądra nie są jednak stabilne - stają się radioaktywne i szybko się rozpadają emitując wysokoenergetyczne szkodliwe promieniowanie.
- Konfiguracja elektronów.
- Atom w ciele stałym ma 6 stopni swobody.

Zwiększając odległości między atomami zwiększa się ilość entropii dla atomu, lecz nie zwiększa się gęstość dla obszaru $\rightarrow$ lepiej pozostać przy stałych materiałach.

Przykład: czysta miedź posiada gęstość entropii w granicach 0,5–1,5 bita na Å$^3$ (w zależności od temperatury).

Można zwiększyć gęstość entropii stosując większe ciśnienie. Aktualnie maksymalne wartości możliwe do utrzymania w stabilnych strukturach nie są jasne. Jedynym jasnym limitem jest ciśnienie w jądrze gwiazdy neutronowej, tuż poniżej masy krytycznej powodującej zapadnięcie się gwiazdy w czarną dziurę - ok. $10^{30}$ atmosfer.

Z powyższych obserwacji wynika, że wysoce nieprawdopodobne będzie przekroczenie gęstości informacji większej niż 10 bitów / $\mathring{A}^3$ w ciągu najbliższych 100 lat.

Nawet jeśli będzie to tylko 1 bit /$\mathring{A}^3$, to 1cm$^3$ takiego materiału mógłby teoretycznie przechowywać $10^{24}$ bitów = 100 miliardów terabajtów - dużo więcej niż całkowita ilość cyfrowych danych przechowywanych obecnie na świecie.

## 2.4. Minimalna energia potrzebna do przechowywania informacji

Minimalizacja zużycia energii przez układ wymaga minimalizacji całkowitej entropii generowanej przez system.

Załóżmy, że posiadamy pewną informację i chcemy ją zapisać na stałe w stanie pewnego układu. Jaka ilość entropii musi być wytworzona w tym procesie?

Trzeba założyć, że układ zawiera już jakąś informacje fizyczną, która może być zarówno znaną informacją jak i entropią. Nie może ona być po prostu zniszczona, ponieważ na najniższym poziomie fizyka jest odwracalna, to znaczy w zamkniętym układzie przejście z jednego stanu do drugiego w pewnym czasie następuje w sposób matematycznie odwracalny. Odwracalność nie wymaga symetrii czasowej.

Jak więc poradzić sobie z niechcianą informacją? Jedną z możliwości jest po prostu przeniesienie jej do innego układu.

Wzrost entropii w układzie o $\Delta S = 1\text{bit} = k_{\mathrm{B}} \ln 2$ wymaga zainwestowania co najmniej $k_{\mathrm{B}} T \ln 2$ energii w postaci ciepła. Pierwszy uszczegółowił to Rolf Landauer łącząc utratę znanej informacji z utratą energii.

W dzisiejszych komputerach każdy zapis operacji, tzn. każda z operacji na bitach dokonana przez każdą z dziesiątek milionów bramek logicznych w każdej nanosekundzie wykorzystuje tą metodę pozbywania się informacji. Zakłada się, że poprzednie informacje są nieznane, powoduje to generację nowej entropii, wykorzystując nieefektywnie energię.

Istnieje pewna alternatywa: przestrzeń i energia zajmowana przez starą, niechcianą (lecz znaną) informację może być ponownie użyta. Wykorzystując informację o poprzednim stanie dokonuje się przekształcenia starego stanu w nowy w termodynamicznie odwracalny sposób - w procesie, który nie generuje entropii.

Dzisiejsza technologia stosująca nieodwracalne zapisywanie informacji jest stosunkowo blisko sięgnięcia podstawowych ograniczeń w zakresie rozpraszania energii. W obecnym tempie limit $k_{\mathrm{B}} T \ln 2$ zostanie osiągnięty za 35 lat. W tym czasie wydajność jednostki obliczeniowej wykorzystującej zwykłe i nieodwracalne (produkujące entropię) operacje zapisu informacji będzie wynosić maksymalnie $3{,}5 \times 10^{22}$ nieodwracalnych bitowych operacji na sekundę w 100W komputerze.

Jakiekolwiek możliwe dalsze udoskonalenia wydajności poza ten punkt wymagają odwracalnego obliczania.

## 3. Ograniczenia komunikacji

Przesyłanie informacji ograniczone jest w sposób podobny do przechowywania informacji. Komunikacja z punktu $A$ do punktu $B$ jest przesyłaniem bitów, pewnym rodzajem ich „przechowywania” lecz w stanie ruchu. Podobnie przechowywanie informacji jest formą „komunikacji” na zerowym dystansie, ale za to w czasie.

Mając ograniczenie gęstości informacji ρ oraz prędkość rozchodzenia się informacji $v$; otrzymujemy limit gęstości strumienia informacji $\rho v$ - ilość informacji przesyłanej w pewnym czasie dla pewnego obszaru.

Oczywiście istnieje limit prędkości rozchodzenia się informacji - prędkość światła $c$.

Smith pokazuje, że maksymalny strumień entropii $F_{\mathrm{S}}$ z użyciem fotonów dla danego strumienia energii $F_{\mathrm{E}}$ wynosi:

$$F_{\mathrm{S}} \leq \frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{SB}}^{1/4} F_{\mathrm{E}}^{3/4}$$

gdzie $\sigma_{\mathrm{SB}}$ to stała Stefana-Boltzmana $\pi^2 k_{\mathrm{B}}^2 / 60 c^2 \hbar^3$.

Przykład: kwadratowa płytka o boku 10cm transmitująca bezprzewodowo z mocą 1W nie może komunikować się z szybkością większą niż $6{,}8 \times 10^{20}$bps, niezależnie od rozkładów częstotliwości czy użytego schematu kodowania, nawet w przypadku całkowitej nieobecności szumu.

Wygląda to na dużo, lecz to tylko 68kbps/nm$^2$. Dla komunikacji pomiędzy sąsiednimi elementami gęsto upakowanego nanoskalowego urządzenia chcielibyśmy uzyskać dużo większe przepustowości, być może rzędu 10$^{11}$bps/nm$^2$. Ten $10^6$ razy większy strumień informacji wymaga jednak $(10^6)^{4/3} = 10^8$ razy więcej mocy (wg Smitha), czyli rzędu 1MW/cm$^2$. Odpowiada to temperaturze rzędu 14000K.

Warto zauważyć, że przy zakodowaniu bitu w bardziej złożonych cząstkach, przy gęstości informacji 1b/nm$^3$, możemy otrzymać wymaganą przepustowość $10^{11}$bps/nm$^2$ poprzez ruch atomów bądź elektronów ze stosunkowo niewielką prędkością 100m/s.

## 4. Ograniczenia szybkości obliczeń

Jaką minimalną cenę, w sensie podstawowych zasobów fizycznych, musimy zapłacić za wykonywanie operacji obliczeniowych?

Istnieje termodynamiczny limit wydajności obliczeniowej nieodwracalnych operacji jako funkcja rozpraszania mocy, spowodowanej koniecznością usuwania niechcianej informacji. Jednak limit ten nie musi się odnosić do odwracalnych operacji. Czy są jakieś inne ograniczenia odnoszące się do jakiegokolwiek typu obliczeń, nawet odwracalnych?

Przy użyciu teorii kwantowej możemy określić maksymalną częstotliwość przy której mogą zachodzić przejścia pomiędzy rozróżnialnymi stanami. Jedna z form tej górnej granicy zależy od całkowitej energii układu $E$ i wynosi $4E/2\pi\hbar$. „Laptop" Lloyd'a posiada całkowitą energię $9\times10^{16}$J, więc maksymalna częstotliwość pracy wynosi $5\times10^{50}$ zmian stanów na sekundę.

Jeśli całkowita energia układu nie bierze udziału w obliczniach, otrzymujemy mniejszy limit. Przykładowo hipotetyczne urządzenie opierające się na pojedynczych elektronach pracujących na poziomie 1eV mogłoby pracować z częstotliwością 1PHz ($10^{15}$Hz).

Zmieniając wykorzystywany zbiór rozróżnialnych stanów w czasie komputer kwantowy może drastycznie skrócić czas obliczeń pewnych problemów. Jednakże częstotliwość ortogonalnych przejść oraz ilość oddzielnych stanów zawsze będą poniżej omówionych tu limitów.

## 5. Konkluzje

Zgodnie z prawem Moore'a za ok. 40 lat zostanie osiągnięty limit 1b/$\mathring{A}^3$, który prawdopodobnie będzie górną granicą.

Ok. roku 2035 osiągnięty zostanie termodynamiczny limit 0.7kT generacji ciepła wynikającego z zapisywania bitu informacji w pamięci w sposób niszczący poprzednią informację tam znajdującą się.

Limity te mogą zostać przekroczone jeśli zostaną opracowane techniki zapisywania informacji nie niszczące poprzedniej informacji.

Częstotliwość pracy procesora nie przekroczy limitów ustalonych przez maksymalną częstotliwość przejść atomowych. Realistyczną granicą jest wartość $10^{15}$Hz - około $10^6$ razy więcej niż dzisiejsze częstotliwości, która będzie osiągnięta za 30 lat.

## Bibliografia


[1] Michael P. Frank, „The Physical Limits of Computing", *Computing in Science & Engineering*, vol. 4, May/June 2002, pp. 27-30;
`http://www.cise.ufl.edu/research/revcomp/physlim/PhysLim-CiSE/c3fra.pdf`.

[2] Douglas E. Post, Francis Sullivan, „Limits on Computations", *Computing in Science & Engineering*, vol. 4, May/June 2002, pp. 27-30;
`http://www.computer.org/cise/cs2002/pdf/c3014.pdf`.

[3] Charles H. Bennett, Rolf Landauer, „The Fundamental Physical Limits of Computation", *Scientific American* 253 (1), 48-56, July 1985;
`http://www.aeiveos.com/~bradbury/Authors/Computing/Bennett-CH/TFPLoC.html`.

[4] Michael P. Frank, „Reversibility for Efficient Computing", Dec. 20, 1999;
`http://www.cise.ufl.edu/~mpf/manuscript/phdthesis.pdf.gz`.

[5] Warren D. Smith; „Fundamental physical limits on computation", May 5, 1995;
`http://www.cise.ufl.edu/~mpf/fundphys.pdf`.

[6] Warren D. Smith, „Fundamental physical limits on information storage", May 13, 1999;
`http://www.cise.ufl.edu/~mpf/memorybound.pdf`.